LES ESPACES DE FONCTIONS LOCALEMENT UNIFORMÉMENT BORNÉS ET APPLICATION

Par:

PENLAP TAMAGOUA Joseph Junior

Matricule: **CM-UDS-16SCI0795**

Sous la direction de:

Prof. Jean Louis WOUKENG

Maître de Conférences, Université de Dschang

November 27, 2021

Introduction générale

Contexte

L'amalgame de L^p et ℓ^q, $(1 \leq p \leq q \leq +\infty)$ a été introduit pour la première fois en 1926 par Nobert Wiener. La première étude systématique de ces espaces a été faite en 1975 par Finbaar Holland.

Plusieurs définitions de ces espaces sont apparues à la suite de recherches menées dans différents domaines.

Maria Torres Desquire dans [2] a fait mention de ces définitions par ordre chronologique de publication et en a établi leur équivalence.

Le but consiste à reprendre les travaux éffectués dans [2] et se restreindre à un cas particulier de ces espaces : $L^p_{uloc}(\mathbb{R}^d)$.

Introduction générale

Motivation

L'étude de ces espaces est motivée par la résolution de problèmes correcteurs en théorie de l'homogénéisation.

Domaines d'applications

La théorie de l'homogénéisation, analyse harmonique.

Introduction générale

Objectifs

L'objectif de ce travail est l'étude des espaces de fonctions localement uniformément bornés et application des résultats de cette étude à la recherche des solutions localement uniformément bornées d'une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre sous forme divergence dans l'espace de type Sobolev $W^{1,2}_{uloc}(\mathbb{R}^d)$.

Introduction générale

Soutenance Master2 2020/2021

PENLAP Joseph

Plan

1. Quelques résultats mathématiques
2. Les espaces $L^p_{uloc}(\mathbb{R}^d)$, $(1 \leq p \leq \infty)$
3. Application à la résolution d'une EDP linéaire du second ordre
4. Conclusion et perspectives

Quelques résultats mathématiques

Définition

On dit que la suite $(x_n) \subset X$ converge faiblement vers $x \in X$ si et seulement si

$$\langle x', x_n \rangle \longrightarrow \langle x', x \rangle, \quad \forall\, x' \in X'. \tag{1}$$

Théorème

Soit $(x_n) \subset X$ une suite d'éléments qui converge faiblement vers x dans X. Alors (x_n) est bornée dans X. De plus, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|x\|_X \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|x_n\|_X\,. \tag{2}$$

Quelques résultats mathématiques

Les espaces $L^P(\mathbb{R}^d)$

On désigne par $L^P(\mathbb{R}^d)$, $(1 \leq p < \infty)$, l'espace des (classes de) fonctions $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurables telles que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \; dx < +\infty, \tag{3}$$

que l'on munit de la norme

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \; dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4}$$

Quelques résultats mathématiques

Propriétés

Les espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$ satisfont les propriétés suivantes :

1. Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\mathbb{R}^d)$ est séparable,
2. Pour $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(\mathbb{R}^d)$ est réflexif,
3. Pour $1 < p < \infty$, l'espace dual de $L^p(\mathbb{R}^d)$ s'identifie à $L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Quelques résultats mathématiques

Représentation de Riesz

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $\varphi \in (L^p(\Omega))'$, $(1 < p < \infty)$. Alors, il existe une fonction $u \in L^{p'}(\Omega)$ unique telle que

$$\forall f \in L^p(\Omega),\ \langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega u f(x)\, dx, \tag{5}$$

De plus, on a

$$\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}. \tag{6}$$

Les espaces $L^p_{uloc}(\mathbb{R}^d)$, $(1 \leq p \leq \infty)$

Définition et notations

Soit $f \in L_0(\mathbb{R}^d)$. Pour $r > 0$ et $p \geq 1$ fixés, on pose

$$_r\|f\|_{p,\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left\|f\chi_{I^r_x}\right\|_p . \tag{7}$$

Alors

$$L^p_{uloc}\left(\mathbb{R}^d\right) = \left\{f \in L_0(\mathbb{R}^d),\ \|f\|_{p,\infty} < +\infty\right\}. \tag{8}$$

Feuto Justin dans [1] a établi l'équivalence entre les normes $_r\|.\|_{p,\infty}$, $\|.\|_{p,\infty}$ et $\|.\|^{\pi}_{p,\infty}$ où π est une partition de $\mathbb{R}^d$.

Les espaces $L^p_{uloc}(\mathbb{R}^d)$, $(1 \leq p \leq \infty)$

Muni de la norme $_r||.||_{p,\infty}$, $L^p_{uloc}(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Banach.

Relations d'inclusions et d'inégalités

Soient $1 \leq p_1, p_2, r \leq \infty$. Si $p_1 < p_2$, alors

$$L^{p_2}_{uloc}(\mathbb{R}^d) \subset L^{p_1}_{uloc}(\mathbb{R}^d). \tag{9}$$

Par conséquent,

$$_r||f||_{p_1,\infty} \leq r^{d(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1})} \, _r||f||_{p_2,\infty}, \text{ pour tout } f \in L_0(\mathbb{R}^d). \tag{10}$$

Les espaces $L^p_{uloc}(\mathbb{R}^d)$, $(1 \leq p \leq \infty)$

Théorème

Soient $1 \leq p, p_1, p_2 \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p} \leq 1$. Alors

$$_r\,||fg||_{p,\infty} \leq_r ||f||_{p_1,\infty}\ _r\,||g||_{p_2,\infty}\,, \text{ pour tout } f, g \in L_0(\mathbb{R}^d). \quad (11)$$

Idée de la preuve

On utilise l'inégalité de Hölder classique dans l'espace deLebesgue L^p pour écrire :

$$_r\left|\left|fg\chi_{I_x^r}\right|\right|_p \leq\ _r\left|\left|f\chi_{I_x^r}\right|\right|_{p_1}\ _r\left|\left|g\chi_{I_x^r}\right|\right|_{p_2}. \quad (12)$$

Par suite, en prenant $\sup_{x\in\mathbb{R}^d}$ membre à membre, on a le résultat.

Les espaces $L^p_{uloc}(\mathbb{R}^d)$, $(1 \leq p \leq \infty)$

Remarque

L'espace $(L^\infty, \ell^1)(\mathbb{R}^d)$ est le plus petit et $L^1_{uloc}(\mathbb{R}^d)$ est le plus grand des espaces amalgames.

Sous-espace fonctionnel

Soit $1 \leq p \leq \alpha \leq \infty$. Posons

$$\|f\|_{p,\infty,\alpha} = \sup_{r>0} r^{d\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p}\right)} {}_r\|f\|_{p,\infty}, \quad f \in L_0(\mathbb{R}^d). \tag{13}$$

On définit

$$\left(L^p_{uloc}\right)^\alpha(\mathbb{R}^d) = \left\{f \in L_0(\mathbb{R}^d) \;/\; \|f\|_{p,\infty,\alpha} < +\infty\right\}. \tag{14}$$

Propriétés

Soit $1 \leq p \leq \alpha \leq \infty$.

1. $(L^p_{uloc})^\alpha(\mathbb{R}^d)$ est un sous-espace vectoriel de $L^p_{uloc}(\mathbb{R}^d)$.
2. Muni de (13), $(L^p_{uloc})^\alpha(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Banach.
3. $L^\alpha(\mathbb{R}^d) \subset (L^p_{uloc})^\alpha(\mathbb{R}^d)$.
4. $(L^{p_2}_{uloc})^\alpha(\mathbb{R}^d) \subset (L^{p_1}_{uloc})^\alpha(\mathbb{R}^d), \ \forall 1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \alpha \leq \infty$.
5. $(L^1_{uloc})^\alpha(\mathbb{R}^d)$ est l'espace de Morrey.
6. $L^\alpha(\mathbb{R}^d) \subset (L^{p_2}_{uloc})^\alpha(\mathbb{R}^d) \subset (L^{p_1}_{uloc})^\alpha(\mathbb{R}^d) \subset (L^1_{uloc})^\alpha(\mathbb{R}^d)$.

Espace de Sobolev associé

Soit $1 \leq p < \infty$. On définit

$$W^{1,p}_{uloc}(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in L^p_{uloc}(\mathbb{R}^d \ / \ \frac{\partial u}{\partial y_i} \in L^p_{uloc}(\mathbb{R}^d,\ 1 \leq i \leq d \right\}. \tag{15}$$

Muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}_{uloc}(\mathbb{R}^d)} = \left(\|u\|^p_{L^p_{uloc}(\mathbb{R}^d)} + \|\partial u\|^p_{L^p_{uloc}(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{16}$$

Les espaces $L^p_{uloc}(\mathbb{R}^d)$, $(1 \leq p \leq \infty)$

Propriétés

1. Muni de (16), $W^{1,p}_{uloc}(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Banach.
2. L'espace $W^{1,p}_{uloc}(\mathbb{R}^d)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.
3. L'espace $W^{1,p}_{uloc}(\mathbb{R}^d)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$.
4. Pour $p = 2$, $W^{1,2}_{uloc}(\mathbb{R}^d) = H^1_{uloc}(\mathbb{R}^d)$, la norme associée étant

$$\|u\|_{H^1_{uloc}(\mathbb{R}^d)} = \left(\|u\|^2_{L^2_{uloc}(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla u\|^2_{L^2_{uloc}(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

Application à la résolution d'une EDP

Présentation du problème

Considérons l'EDP linéaire du second ordre suivante

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) + u = f + \operatorname{div} F \quad \text{dans} \ \mathbb{R}^d \tag{18}$$

Où

$$\begin{cases} f \in L^2_{uloc}(\mathbb{R}^d), F \in L^2_{uloc}(\mathbb{R}^d)^d \quad \text{et} \quad A \in L^\infty(\mathbb{R}^d)^{d\times d} \\ \alpha\left|\lambda\right|^2 \leq A(x)\lambda.\lambda \leq \beta\left|\lambda\right|^2. \end{cases} \tag{19}$$

Inégalité de Caccioppoli

Soit u solution de (18). Alors il existe une constante $C = C(d, \alpha, \beta) > 0$ telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \fint_{B_r(x)} \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right) \leq C + C \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \fint_{B_r(x)} \left(|f|^2 + |F|^2\right). \tag{20}$$

Application à la résolution d'une EDP

Résultat d'existence et d'unicité

Soit $f \in L^2_{uloc}(\mathbb{R}^d)$ et $F \in L^2_{uloc}(\mathbb{R}^d)^d$. Il existe une unique fonction $u \in W^{1,2}_{uloc}(\mathbb{R}^d)$ solution de (18). De plus u vérifie

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^d} \fint_{B_r(z)} \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right) \leq C \sup_{z\in\mathbb{R}^d} \fint_{B_r(z)} \left(|f|^2 + |F|^2\right). \quad (21)$$

Où $C = C(r, d, \alpha, \beta) > 0$ et $B_r(z) = B(z, r)$ désigne la boule ouverte centrée en z de rayon r.

Application à la résolution d'une EDP

Idée de la preuve

Elle se fait en deux étapes : existence et unicité de la solution.

Preuve de l'existence

Formulation variationnelle de (18)

$$\int_{B_r} \eta_z^2 A\nabla u_r.\nabla u_r + \int_{B_r} \eta_z^2 u_r^2 = -2\int_{B_r} \eta_z u_r A\nabla u_r.\nabla \eta_z$$
$$-2\int_{B_r} \eta_z u_r H.\nabla \eta_z - \int_{B_r} \eta_z^2 H.\nabla u_r + \int_{B_r} h\eta_z^2 u_r \tag{22}$$
$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

En utilisant l'inégalité de Young et les propriétés de la matrice A, on a les estimations suivantes

$$\alpha \int_{B_r} \eta_z^2 |\nabla v_r|^2 + \int_{B_r} \eta_z^2 v_r^2 \tag{23}$$

$$|I_1| \leq \frac{\alpha\beta}{k} \int_{B_r} v_r^2 |\nabla \eta_z|^2 + \frac{\beta k}{\alpha} \int_{B_r} v_r \eta_z^2 |\nabla v_r|^2, \tag{24}$$

$$|I_2| \leq \frac{\alpha\beta}{k} \int_{B_r} v_r^2 |\nabla \eta_z|^2 + \frac{k}{\alpha\beta} \int_{B_r} \eta_z^2 |F|^2 \tag{25}$$

$$|I_3| \leq \frac{\beta k}{\alpha} \int_{B_r} \eta_z^2 |\nabla v_r|^2 + \frac{\alpha}{4k\beta} \int_{B_r} \eta_z^2 |F|^2 \tag{26}$$

$$|I_4| \leq \frac{\alpha\beta c^2}{k} \int_{B_r} v_r^2 \eta_z^2 + \frac{k}{4\alpha\beta c^2} \int_{B_r} \eta_z^2 |f|^2 . \tag{27}$$

Application à la résolution d'une EDP

Notons que $|\nabla \eta_z| = c\eta_z$. En prenant $k = \frac{\alpha^2}{4\beta}$ et $c = \frac{1}{2\beta}\left(\frac{\alpha}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$, nous avons l'estimation suivante

$$\alpha \int_{B_r} \eta_z^2 |\nabla u_r|^2 + \int_{B_r} \eta_z^2 u_r^2 \leq \int_{B_r} \left[\frac{3}{2}|f|^2 + \left(\frac{\alpha}{4\beta^2} + \frac{1}{\alpha}\right)|F|^2\right]\eta_z^2. \tag{28}$$

De (28)

$$\exists\, (u_r)_{r>0} \ / \ u_r \to u \quad \text{dans} \quad W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^d) - \text{faible.} \tag{29}$$

Application à la résolution d'une EDP

Passage à la limite

Remarquons que u est une solution faible de (18). En prenant la $\lim_{r\to\infty}$ inf dans (28), on obtient

$$\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \eta_z^2 |\nabla u_r|^2 + \int_{\mathbb{R}^d} \eta_z^2 u_r^2 \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left[\frac{3}{2}|f|^2 + \left(\frac{\alpha}{4\beta} + \frac{1}{\alpha}|F|^2\right)\right]\eta_z^2 \tag{30}$$

Ainsi, nous déduisons de (30) que

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^d} \fint_{B_r(z)} \left(|\nabla v|^2 + |v|^2\right) \leq C_1 \tag{31}$$

Où $C_1 = \left(\frac{\alpha}{4\beta^2} + \frac{1}{\alpha}\right) \|F\|^2_{L^2_{uloc}} + \frac{3}{2}\|f\|^2_{L^2_{uloc}}$.

Application à la résolution d'une EDP

En vertu de l'inégalité de Caccioppoli nous avons

$$\fint_{B_r(z)} |\nabla u|^2 + \fint_{B_r(z)} |u|^2 \leq C \left\{ \fint_{B_r(z)} |f|^2 + \fint_{B_r(z)} |F|^2 \right\} + \frac{C}{r^2} \fint_{B_{2r}(z)} |\nabla u|^2 . \tag{32}$$

Où $C = C(d, \alpha, \beta) > 0$. Par suite, on a bien

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \fint_{B_{2r}} |u|^2 \leq C_d \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \fint_{B_r} |u|^2 . \tag{33}$$

De (33), on a bien

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \fint_{B_r} |\nabla u|^2 + \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \fint_{B_r} |u|^2 \leq C \left\{ \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \fint_{B_r} \left(|f|^2 + |F|^2\right) \right\} \\ C\, r^{-2} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \fint_{B_r} |u|^2 . \tag{34}$$

En définitif, si $r \geq 2C$, alors on a (21).

Application à la résolution d'une EDP

Preuve de l'unicité

Prouver l'unicité de la solution revient à considérer (18) avec $f = 0$ et $F = 0$. C'est-à-dire

$$-\mathrm{div}(A\nabla u) + u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \tag{35}$$

D'après l'inégalité de Caccioppoli, on a:

$$\int_{B_r(z)} |\nabla u|^2 + \int_{B_r(z)} |u|^2 \leq \frac{C}{r^2} \int_{B_{2r}(z)} |u|^2 . \tag{36}$$

De (36), on a

$$\int_{B_r(z)} |u|^2 \leq \frac{C}{r^2} \int_{B_{2r}(z)} |u|^2 . \tag{37}$$

Application à la résolution d'une EDP

Cependant, en vertu de (33) et (31), (37) devient

$$\int_{B_r(z)} |u|^2 \leq C\, r^{-2}, \quad \text{pour } r \geq 1. \tag{38}$$

Ainsi en faisant tendre $r \to +\infty$, on obtient $u = 0$ sur $\mathbb{R}^d$.

Conclusion et perspectives

Conclusion

Nous avons,

1. fait une étude systématique des espaces de fonctions localement uniformément bornés,
2. Montré que ces espaces contiennent les espaces de Lebesgue,
3. Énoncé et prouvé le théorème d'existence et d'unicité de la solution localement uniformément bornée.

Perspectives

Nous proposons dans les travaux futurs de résoudre des problèmes d'homogénéisation dans ce type d'espace, tout en proposant un schéma numérique efficient.

Conclusion et perspectives

Conclusion

Nous avons,

1. fait une étude systématique des espaces de fonctions localement uniformément bornés,
2. Montré que ces espaces contiennent les espaces de Lebesgue,
3. Énoncé et prouvé le théorème d'existence et d'unicité de la solution localement uniformément bornée.

Perspectives

Nous proposons dans les travaux futurs de résoudre des problèmes d'homogénéisation dans ce type d'espace, tout en proposant un schéma numérique efficient.

Bibliographie

Bibliographie

[1] J. Feuto, Espaces $(L^q; \ell^p)(G)$ sur un groupe de type homogène et continuité de l'intégrale fractionnaire, Analyse classique [math.CA]. Université de Cocody, 2003. Français

[2] M. L. Torres Desquire, Amalgams of L^p And ℓ^q, Open Dissertations and Theses, 1-60, 1984.

[3] A. L. Pokam Kakeu, J. L. Woukeng, Homogenization of nonlinear parabolic equations with hysteresis. ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 100. 10 (2020): e201900323.

FIN !!!

NOUS VOUS REMERCIONS

POUR VOTRE AIMABLE

ATTENTION